Resgate histórico da relação exponencial sobre os juros compostos

Historical analysis of the exponential relationship over compound interest rates

*Carlos Eduardo Francischetti**
*Clóvis Luís Padoveze***
*Antonio Carlos Giuliani****

Resumo

Como um resgate histórico dos estudos de dois grandes nomes da história da ciência, Henry Briggs e John Napier, este texto apresenta um estudo exploratório com demonstrações práticas da relação exponencial e^x (base do logaritmo natural) com a base de cálculos em juros compostos e como tal relação foi descoberta por John Napier, o inventor dos logaritmos. Palavra de origem grega formada de: *lógos* (razão, evolução, discurso) + *arithmós* (número), *logarithimo* significa, literalmente, a evolução de um número. Os logaritmos foram publicados em 1614, na primeira edição de *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Maravilhosa Descrição das Leis da Evolução dos Números), simplificando a compreensão e os cálculos realizados no contexto da matemática financeira atual.

Palavras-chave: Napier; juros simples; juros compostos; logaritmo natural; relação exponencial.

Abstract

As a historical redemption of the studies of two great figures in the history of science, Henry Briggs and John Napier, this text presents an exploratory study with practical applications of the exponential relationship ex (natural log base) based on calculations of compound interest rates and how such relationship was discovered by John Napier, the inventor of logarithms. Word of Greek origin, formed by logos (reason, evolution, discourse) + arithmos (numbers) logarithms means, literally, the evolution of a number. Logarithms were first published in 1614, in the first edition of Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio(Wonderful Description of the Laws of the Evolutions of Numbers), simplifying the comprehension and the calculations executed within today's financial mathematics.

Key words: Napier; simple interest; compound interest; natural logarithm; exponential relationship.

* Economista, Especialista em Gerência Financeira e Controladoria pela UNISAL (Americana-SP). Professor da Faculdades Integradas Einstein de Limeira (FIEL) e da Universidade Paulista (UNIP). cefranc@ibest.com.br / cefranc@vivax.com.br

** Administrador e contador, Doutor em Controladoria e Contabilidade pela Universidade de São Paulo (USP). Professor da Universidade Metodista de Piracicaba (UNIMEP). cpadoveze@romi.com.br

*** Administrador, Doutor em Educação pela UNIMEP e professor desta mesma universidade. cgiuliani@unimep.br

Introdução

Pode-se afirmar que o surgimento do juro como remuneração pelo uso da cessão de dinheiro para terceiros ocorreu juntamente com o surgimento da moeda, por volta do século VII a.C., na Lídia, reino da Ásia Menor, região que hoje corresponde a Turquia e Iraque.

Conforme Sandroni (2001), os economistas clássicos atribuíam a cobrança de juros à produtividade do capital, ou seja, ao lucro que o capital proporciona a quem o possui. Outra maneira de encarar o juro é a cobrança pelo serviço que o dinheiro presta a quem o toma emprestado. Também de acordo com Sandroni (2001), Keynes explicou a cobrança de juros pela escassez de capital (fator objetivo) e pela renúncia à liquidez do dono do capital (fator subjetivo).

A Matemática Financeira está diretamente ligada ao valor do dinheiro no tempo, que, por sua vez, está interligado à existência da taxa de juros. Do ponto de vista da matemática financeira, $ 1000,00 hoje não são iguais a $ 1.000,00 em qualquer outra data, pois o dinheiro cresce no tempo ao longo dos períodos, devido à taxa de juros por período (PUCCINI, 2006).

Assim, um capital de $ 1.000,00 aplicado hoje, com uma taxa de juros de 8% ao ano, implicará um rendimento anual de $ 80,00, proporcionando um montante de $ 1.080,00 ao final de um ano. Neste caso, é indiferente termos $ 1.000,00 hoje ou $ 1.080,00 daqui a um ano.

Dessa forma, temos uma regressão linear para os valores correspondentes ao regime de juros simples e uma regressão exponencial para os valores do regime de juros compostos. Os juros compostos ou o sistema de capitalização composta, juros sobre juros, nos mostra que ao longo do tempo o juro é incorporado ao valor do principal em cada período e, daí, temos um novo montante e assim sucessivamente.

As variações de muitas grandezas importantes na economia, nas finanças, nas ciências físicas, sociais e biológicas podem ser descritas por uma função exponencial.

Quanto maior a freqüência com que os juros são capitalizados, maior o montante correspondente. Assim, um banco que capitaliza freqüentemente os juros tende a atrair mais clientes do que um banco que oferece a mesma taxa de juros mas capitalizada com menor freqüência. Neste caso, porém, quanto será o montante ao final de *n* anos, se a capitalização dos juros tender ao infinito?

Para resolvermos essa questão, precisamos estudar a relação exponencial e^x (base do logaritmo natural), embora a princípio seja difícil entender o que existe de "natural" nos logaritmos baseados em um número que precisa ser definido por um limite. O que distingue o cálculo da álgebra é a noção de limite. O processo de determinar o limite consiste em investigar o comportamento de uma função $f(x)$ quando x se aproxima de um número que pode ou não pertencer ao domínio de f. Os limites aparecem em um grande número de situações da vida real. Quando falamos do lucro em um mercado ideal, na verdade estamos trabalhando com situações-limite, ou seja, $\lim_{n \to x} f(x)$.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo exploratório com demonstrações práticas da relação exponencial e^x, através de um resgate histórico dos estudos realizados com base nos cálculos em juros compostos, e mostrar como tal relação foi descoberta e comprovada por John Napier, o inventor dos logaritmos. Por meio da análise apresentada em sua obra publicada em 1618, na segunda edição de *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Maravilhosa Descrição das Leis da Evolução dos Números), demonstra que esse número e aparece naturalmente em diversos problemas práticos, possibilitando uma maior compreensão, assimilação e comprovação dos princípios básicos da matemática financeira e da sua utilidade em nossas vidas.

1 Fundamentos de matemática financeira: juros simples x juros compostos

A matemática financeira é um ramo da matemática aplicada. Mais precisamente, estuda o comportamento do dinheiro no tempo. Todo comprador sabe que numa compra a prazo o preço aumenta. Ou seja, na verdade está emprestando a um acréscimo de juros referente ao seu aluguel. Quando este juro é calculado sobre o montante de capital, chamamos de juros simples. Quando existe um juro periódico, vencido e não pago sendo somado ao capital emprestado, formando um montante sobre o qual é calculado o juro seguinte (juros sobre juros), chamamos de juro composto.

A aplicação dos juros simples, nos dias de hoje, é quase nula, pois nas instituições bancárias, financeiras e lojas em geral a atualização monetária de seus empréstimos e financiamentos é calculada com base nos juros compostos.

A diferença entre o juro simples e o juro composto é simples de se perceber ao compararmos os dois num exemplo prático: imaginem-se R$ 5.000,00, aplicados a uma taxa de juros de 1,3084% ao mês, durante 4 meses.

Juros simples

1º mês → (5.000,00 x 0,013084) + 5.000,00 = 5.065,42

2º mês → (5.000,00 x 0,013084) + 5.065,42 = 5.130,84

3º mês → (5.000,00 x 0,013084) + 5.130,00 = 5.196,26

4º mês → (5.000,00 x 0,013084) + 5.195,00 = 5.261,68

O juro total será de R$ 5.261,68 – R$ 5.000,00 = R$ 261,68.

Poderíamos ter calculado o valor final de nosso capital aplicado durante os quatro meses através da seguinte fórmula:

$J = VP.i.n$

onde:

J = Juros

VP = Valor presente

i = Taxa de juros

n = Período

J = 5.000,00 . 0,013084 . 4 = R$ 261,68

Para obtermos o VF (valor futuro), basta somarmos o valor dos juros com o valor do capital aplicado, ou capital inicial, ou ainda VP (valor presente), e obteremos então:

R$ 5.000,00 + R$ 261,68 = R$ 5.261,68.

Juros compostos

O valor do capital ou investimento inicial é atualizado mês a mês:

1º mês → (5.000,00 x 0,013084) + 5.000,00 = 5.065,42

2º mês → (5.065,42 x 0,013084) + 5.065,42 = 5.131,70

3º mês → (5.131,70 x 0,013084) + 5.131,70 = 5.198,84

4º mês → (5.198,84 x 0,013084) + 5.198,84 = 5.266,86

O juro total será de R$ 5.266,86 – R$ 5.000,00 = R$ 266,86.

Também, poderíamos ter calculado o valor final de nosso capital aplicado durante os quatro meses pela fórmula que se segue:

$VF = VP.(1+i)^n$

onde:

VF = Valor futuro

VP = Valor presente

i = Taxa de juros

n = Período

$VF = 5.000,00.(1 + 0,013084)^4 = 5.266,86$

VF retorna o valor futuro de um investimento de acordo com um pagamento ou desembolso a uma taxa de juros constante, durante um determinado período de tempo. Observe-se que a função que define o juro composto é de natureza exponencial, pois a taxa em que uma grandeza varia em relação à outra é crescente. Já o juro simples é de natureza linear ou de primeiro grau, ou seja, a taxa em que uma grandeza varia em relação à outra é constante.

2 Origens da Matemática Financeira

Os anos de 1450 a 1650 constituem um período histórico em que os termos *depositum,* do latim *ponere* (por), *juro* (jurar) e *credere* (acreditar) começam a aparecer com freqüência e a ser usados no cotidiano das pessoas, surgindo, então, a matemática financeira como uma ferramenta essencial para a vida de todo comerciante, banqueiro e homem de negócios.

Podemos citar várias obras sobre o assunto, mas as que mais se destacam por contribuir para a perpetuação da matemática financeira são os estudos de M. Koutorga, *Essai Historique Sur les Trapézites*[1] *ou Banquiers* (Ensaio Histórico sobre os Trapézios ou Banqueiros), de 1859; de W. Cunningham*, The Growth of English Industries and Comerce* (O Crescimento das Indústrias Inglesas e do Comércio), de 1896; de S. Oill, *Roman Society in the Last Century under the Western Empire* (Sociedade Romana no Último Século no Império Ocidental), de 1898; e de E. Gardner, *The Story of Florence* (A História de Florença), de 1900.

3 A Relação Exponencial com a Matemática Financeira

Em 1618, quando foi publicada a segunda edição do *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Maravilhosa Descrição das Leis da Evolução dos Números), de John Napier ou Barão de Merchiston, o autor dos logaritmos, e no seu capítulo *Appendix to the Logarithmes* (Apêndice dos Logaritmos) foi apresentada ao mundo a origem algébrica da constante matemática e = 2,718281..., coincidência ou não tal número surgiu exatamente em virtude dos ensaios realizados por John Napier em cálculos de juros compostos. Como prova disso, podemos recalcular o nosso exemplo dos juros compostos da seguinte forma:

$$VF = VP.(1+i)^n$$

$$VF = VP.e^{i.n}$$

$$VF = 5.000{,}00.(2{,}718281)^{0{,}013084.4} = R\$\ 5.266{,}86$$

O número 2,718281... aparece em várias aplicações da matemática e sua origem geométrica é creditada ao grego Apolônio (263 a.C.), que estudou as cônicas, particularmente a hipérbole. Mas o nome dado a essa constante e, número *neperiano*, é em homenagem a John Napier (1618). Esse número também apareceu em muitas outras obras. O rótulo de logaritmo natural (*Logarithmus Naturalis*) foi dado por Nicolao Mercator, em 1668, no seu livro *Logarithmo Technia* (Técnica Logarítmica), enquanto a letra *e* foi sugerida por Leonard Euler em um manuscrito de 1727 e publicado em 1862, no *Opera Posthuma* (Obra Póstuma). Euler escreveu: *"[...] scribitur pro numeo cujus logarithumus est untas e, qui est 2,7182"*[2] (RICIERI, 1991).

4 Os ensaios de John Napier

Napier viveu entre 1550 e 1617, em pleno renascimento europeu.

Na Inglaterra, Shakespeare, um dos maiores teatrólogos de toda a História, publica *Sonho de uma Noite de Verão*, *O Mercador de Veneza*, *Hamlet*, *Otelo*, *Romeu e Julieta*. Esta foi uma época em que a Literatura era extremamente penetrante, com personagens marcados pelas paixões, pelo ódio doentio, pela dúvida e pela ilusão.

---

1 Trapézios: bancas ou mesas usadas pelos banqueiros e cambistas para trocas e conversões de moedas.

2 Tradução: [...] escrever para os logaritmos cujos números de e serão 2,7182.

Na Espanha, Miguel de Cervantes escreve um dos livros mais famosos de toda a história da humanidade, *Dom Quixote*, em que critica o mundo medieval através da triste figura de Dom Quixote em suas investidas contra moinhos de vento que imagina serem gigantes perversos.

Em Portugal, Luís de Camões publica *Os Lusíadas*, uma coletânea de poemas épicos que narram a viagem de Vasco da Gama às Índias.

Na Alemanha destacam-se as concepções religiosas defendidas por Martinho Lutero, fanático religioso que prega as idéias de salvação da alma, em contraposição à Igreja rica, poderosa, preocupada principalmente em resgatar quantidades cada vez maiores de ouro (RICIERI, 1987).

No século XVI ocorrem profundas modificações na religião, impulsionadas pelo capitalismo, que emergia com o Renascimento. Ao lado de uma burguesia poderosa, surgem recursos ao desenvolvimento intelectual e tecnológico, exigindo idéias novas, coerentes, progressivas, lançadas por homens como Kepler, Leibniz e Napier.

Matemático escocês, John Napier, Barão de Merchiston, nasceu no castelo de Merchiston, nas proximidades de Edinburg, no ano de 1550. Diferentemente de muitos homens importantes para a ciência, Napier viveu sempre em meio ao luxo: teve comida farta, boas roupas, bons carros, excelentes professores, mulheres, enfim, sempre teve tudo o que o dinheiro pôde comprar. Seu tio materno, Adam Bothwere, primeiro bispo de Orkney, coroou o rei Jaime VI e celebrou o casamento da rainha Maria.

Desde criança, Napier mostra-se diferente dos demais jovens de sua classe social. Em vez de dedicar-se à caça e à guerra, prefere as atividades intelectuais, revelando-se brilhante estudioso, péssimo caçador e guerreiro desajeitado.

Até os doze anos tem aulas particulares em seu castelo, com importantes professores escoceses especialmente contratados por seu pai. Aos treze anos ingressa na Universidade de St. Andrews, destacando-se como um dos melhores alunos. Por sua grande capacidade intelectual, o bispo de Orkney sugere à família de Napier que o mande à França, onde poderia ter acesso a mestres que viriam a revolucionar a Matemática e a Filosofia. Assim, Napier vai para a França, mas aí só ficaria durante um ano, pois sente falta da família e das mordomias.

De volta à Escócia, interessa-se pela Teologia e pela Aritmética.

Em 1593, publica o livro *Descoberta Evidente de toda Revelação de São João*, fazendo uma série de considerações sobre suas idéias teológicas, quando especula somente episódios fúteis, sem nenhum conteúdo filosófico. Contudo, este livro revela que Napier assimila a maneira grega de argumentar e raciocinar (RICIERI, 1987).

Napier ficou conhecido em toda a Escócia em 1585, quando inventa várias máquinas destinadas à guerra. Esses engenhos militares eram capazes de arremessar bolas de ferro a metros de distância, com uma precisão considerável para a tecnologia disponível naquele século. Napier iria arrepender-se amargamente por tais estudos e construções, condenando-se por ter conferido a seus patrícios o poder da destruição (RICIERI, 1991).

Em 1590 descobre os logaritmos e torna-se famoso internacionalmente, passando a ser considerado um grande matemático e, principalmente, um eficaz colaborador na resolução dos complexos problemas que surgiam na astronomia.

Os logaritmos eram não só um artifício que simplificava de maneira considerável a aritmética, mas também um incremento aos princípios fundamentais da análise matemática. A partir deles sentiu-se necessidade de criar uma nova estrutura filosófica para comportar e interpretar tal instrumento de cálculo (RICIERI, 2002).

A descoberta dos logaritmos teve início em 1588, quando Napier procurava uma relação sistemática de correspondência entre as progressões aritméticas e as progressões geométricas. Graças a esse estudo, pôde perceber o sistema operacional que estava por trás dessas séries. Essa descoberta seria de extrema importância para o Cálculo Diferencial, que surgiria tempos depois. Após a formalização da técnica logarítmica, passou a trabalhar desesperadamente na construção de tábuas logarítmicas, que seriam publicadas 25 anos mais tarde (RICIERI, 1987).

A palavra "logaritmo", criada por Napier, formada de *lógos* (evolução) e *arithmos* (números), significava, assim, evolução dos números. A publicação, em 1614, da sua obra *Mirifi Logarithmorum Canonis Descriptio* (Maravilhosa Descrição das Leis da Evolução dos Números), logo teve sucesso imediato, e entre os seus admiradores e seguidores estava Henry Briggs (1558-1630), professor de matemática em Oxford. Em 1615, Briggs visitou Napier em seu castelo, na Escócia, quando discutiram possíveis modificações no sistema de logaritmos. Briggs ajudou na publicação de algumas obras de Napier e, em 1617, escreveu *Logarithmorum chilia prima* (Introdução aos Logaritmos) e, em 1624, *Arithmetica logarithmica* (Aritmética Logarítmica).

Em meio a tanto trabalho, John Napier deparou-se com o valor de 2,718281..., quando provavelmente estava interessado em auxiliar os negócios de seu pai. Homem muito rico da época, constantemente arrendava terras e emprestava dinheiro em troca de pagamentos e recebimentos de juros pelos seus favores. Foi então que Napier percebeu que, ao aumentarmos os períodos de capitalização, obtínhamos valores cada vez maiores. Observe-se o exemplo utilizando as notações de Napier descritas na segunda edição de *Mirifi Logarithmorum Canonis Descriptio*: imagine-se que $ 100,00 foram aplicados ou emprestados a uma taxa de juros de 8% ao ano, durante dois anos, capitalizados ao semestre e, depois,ao trimestre:

Capitalização semestral

$$VF = 100{,}00.\left(1+\left(\frac{0{,}08}{2}\right)\right)^4 = R\$116{,}99$$

Capitalização trimestral

$$VF = 100{,}00.\left(1+\left(\frac{0{,}08}{4}\right)\right)^8 = R\$117{,}16$$

Observe-se que, trimestralmente, existe um valor para VF maior do que o encontrado para o semestre, neste mesmo período.

Ao apreender tal relação, Napier considerou o seguinte:

Primeira aplicação – divisão do ano em 1 período

Capital (C_0 = 100)

Juros (J = 100% ao ano)

No final do 1º ano → $C_1 = C_0 + 100 = 200$ →

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

Segunda aplicação – divisão do ano em 2 períodos

Capital (C_0 = 100)

Juros (J = 50% no semestre)

No final do 1º semestre → $C_1 = C_0 + 50 = 150$ →

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^1 = 1{,}5$$

No final do 2º semestre → $C_2 = C_1 + 75 = 225$ →

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$$

Terceira aplicação – divisão do ano em 4 períodos

Capital (C_0 = 100)

Juros (J = 25% ao trimestre)

No final do 1º trimestre → $C_1 = C_0 + 25 = 125$ →

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^1 = 1{,}25$$

No final do 2º trimestre → $C_2 = C_1 + 31{,}25 = 156{,}25$ →

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 = 1{,}5625$$

No final do 3º trimestre → $C_3 = C_2 + 39{,}06 = 195{,}31$ →

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^3 = 1{,}9531$$

No final do 4º trimestre → $C_4 = C_3 + 48,83 = 244,14$ →

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2,4414$$

O capital corrigido no enésimo período será sempre dado por:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

A partir daí, atribuiu diversos valores para o fator de correção:

Sendo: $$f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$f(1) = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$f(10) = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2,5937\ldots$$

$$f(100) = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048\ldots$$

$$f(1000) = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7169\ldots$$

$$f(10000) = \left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2,7181\ldots$$

$$f(100000) = \left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000} = 2,7181\ldots$$

Isto é:

$$\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty} = 2,718\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Os limites descrevem o comportamento de uma função perto de um ponto, mas não necessariamente no próprio ponto. No nosso caso, o ponto para onde tende o limite é o infinito, e à medida que aumentamos *n* de maneira a nos aproximarmos cada vez mais do infinito, sempre estaremos apenas nos aproximando dele, nunca o atingindo.

Essa experiência pode ser comprovada quando da análise da teoria da capitalização contínua ou composta de um capital, a qual resolvemos obtendo a relação exponencial sobre os dados considerados, conforme demonstrado por Napier. Combinando a expressão:

$$VF = VP.(1+i)^n$$

Com o fator de correção do valor presente (principal) determinado pelo limite de *f(n)*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Substituindo o índice de reajuste ou atualização $(1 + i)^n$ da fórmula tradicional pela constante *e*, e elevando pela taxa *i* e multiplicando pelo período *n* desejado, teremos:

$$VF = VP.e^{i\,\cdot\,n}$$

> A composição contínua envolve a capitalização a cada microssegundo – o menor período de tempo imaginável. Nesse caso, *n* pode se aproximar de infinito; conseqüentemente, o cálculo nos leva a uma função exponencial (e^x) (GITMAN, 2005).

Napier, na verdade, provou que por mais que alguém quisesse ganhar juros infinitos com cobranças ao ano, ao semestre, ao trimestre, ao mês, por semana, por dia, por hora, por minuto, por segundo e assim sucessivamente, não conseguiria ter um ganho maior que o apresentado pelo fator de correção, para valores cada vez maiores de *n*, pois o seu resultado será sempre 2,718...

Napier morreu em 4 de abril de 1617, em seu castelo de Merchiston.

5 Aplicações práticas

No regime de capitalização contínua, os valores monetários fluem contínua e uniformemente através do tempo, segundo uma função matemática. Ela é muito usada em finanças na avaliação de projetos de investimentos, depreciação, geração de custos e lucros da empresa e outras situações em que os fluxos monetários encontram-se distribuídos uniformemente no tempo. Na prática, muitas situações exigem o uso da capitalização contínua. Vamos analisar alguns casos:

1) (SAMANEZ, 2002, p.196). Uma plantação de eucaliptos para fabricação de celulose tem 80.000 m^3 de madeira. O preço atual da madeira é de \$20,00/m^3 e a taxa contínua de crescimento das árvores é de 20% ao ano.
   a) calcular o valor da plantação após quatro anos;
   b) determinar em que prazo dobra o valor da plantação.

a) Dados:

$VP = 80.000\ m^3 \ .\ 20,00$

$i = 20\%$ a.a.

$n = 4$ anos

$VF = ?$

Solução:

$VF = VP.e^{i.n}$

$VF = (80.000\ .\ 20,00)\ .\ e^{0,20\ .\ 4}$

$VF = 1.600.000\ .\ 2,225540928$

$VF = \$\ 3.560.865,49$

O valor da plantação após quatro anos será de \$ 3.560.865,49.

b) Dados:

$VP = 1$

$i = 20\%$ a.a.

$n = ?$

$VF = 2$

Solução:

$VF = VP.e^{i.n}$

$2 = 1\ .\ e^{i.n}$

$2 = 1\ .\ e^{0,20\ .\ n}$

$2 = e^{0,20\ .\ n} \rightarrow e^x = \ln(x) \rightarrow e^x = \ln(2) = 0,6931$

então:

$2 = e^{0,20\ .\ n} \rightarrow e^x = e^{0,20\ .\ n}$

$e^{0,6931} = e^{0,20\ .\ n}$

$0,6931 = 0,20\ .\ n$

$$n = \frac{0,6931}{0,20} = 3,47 \text{ anos}$$

O valor da plantação irá dobrar em 3,47 anos ou 3,5 anos aproximadamente.

2) (SAMANEZ, 2002, p.195). Determinar a taxa efetiva trimestral equivalente a uma taxa de 35% ao ano.

Dados:

$n = 4$ trimestres

$i = 35\%$ a.a.

$i_t = ?$

Solução:

$(1 + i_t)^n = e^i$

$(1 + i_t)^4 = e^{0,35}$

$(1 + i_t)^4 = 1,419067549$

$(1 + i_t) = \sqrt[4]{1,419067549}$

$(1 + i_t) = 1,091442265$

$i_t = 1,091442265 - 1$

$i_t = 0,091442265 = 9,1442\%$ a.t.

A taxa anual de 35% equivale a uma taxa trimestral de 9,1442%.

3) (HOFFMAN e BRADLEY, 2002, p.235). Se $ 1.000,00 são investidos a juros anuais de 8%, quanto tempo o investimento levará para dobrar de valor?

Dados:

$i = 8\%$ a.a.

$n = ?$

$VP = 1.000,00$

$VF = 2.000,00$

Solução:

$VF = VP \,.\, e^{i\,.\,n}$

$2.000,00 = 1.000,00 \,.\, e^{0,08\,.\,n}$

$2 = e^{0,08\,.\,n}$

$\ln(2) = 0,08 \,.\, n$

$$n = \frac{\ln(2)}{0,08} = 8,66 \text{ anos}$$

O investimento levará cerca de 8,66 anos para dobrar de valor.

4) (SAMANEZ, 2002, p.198). Um projeto de irrigação proporcionará um lucro total de $ 64 milhões em 20 anos de operação. Calcular o valor atual do lucro considerando uma taxa de juros efetiva de 8% ao ano e realização dos lucros em regime de fluxo uniforme.

Dados:

$VF = 64$ milhões

$i_{ef} = 8\%$ a.a.

$n = 20$ anos

$VP = ?$

Solução:

Primeiro temos que transformar a taxa efetiva em taxa de juros normal:

$i = \ln(1 + i_{ef}) = \ln(1,08) = 0,07696104 = 7,696104\%$ a.a.

então:

$$VP = VF\left[\frac{1-e^{-i.n}}{i.n}\right]$$

$$VP = 64.\left[\frac{1-e^{-0,07696104\ .\ 20}}{0,07696104\ .\ 20}\right]$$

$VP = \$\ 32,66$ milhões

O valor atual do lucro desse projeto de irrigação é de $ 32.660.000,00.

5) (BAUER, 2003, p.112). Quantos depósitos mensais de $ 500,00 devo efetuar para ter, um mês após o último depósito, o saldo de $ 2.037,78, se receber juros de 0,75% ao mês?

Dados:

$FV = 2.037,78$

$PMT = 500,00$

$i = 0,75\%$ a.m.

$n = ?$

Solução:

$$n = \frac{\ln\left[\frac{FV\ .\ i}{PMT\ .\ (1+i)}+1\right]}{\ln(1+i)}$$

$$n = \frac{\ln\left[\frac{2.037,78\ .\ 0,0075}{500,00\ .\ (1+0,0075)}+1\right]}{\ln(1+0,0075)}$$

$$n = \frac{\ln(1,030339)}{\ln(1,0075)} = \frac{0,029888}{0,007472}$$

$n = 3,999995$ depósitos

Devo efetuar quatro depósitos mensais para obter o valor de $ 2.037,78.

Considerações finais

A descoberta de John Napier está relacionada à cobrança de juros em uma época em que qualquer opinião ou idéia contrária à ideologia da Igreja tornava-se condição indiscutível para um julgamento e condenação à fogueira pela Inquisição. Na verdade, não houve nenhum fato relevante sobre este assunto que influenciasse sua vida, pois obteve respaldo e atraiu a simpatia de seu tio materno Adam Bothwere, primeiro Bispo de Orkney, não chamando muito a atenção na época. A descoberta dos logaritmos foi uma surpresa para todos. Não houve nenhum indício de tal feito antes da publicação e divulgação da sua obra *Mirifi Logarithmorum Canonis Descriptio*.

Nos bancos, os juros são capitalizados mais de uma vez ao ano. Os juros são acrescentados à conta durante cada período e passam a render juros nos períodos subseqüentes. Quanto maior a freqüência com que os juros são capitalizados, maior o montante correspondente. A relação exponencial encaixa-se nesse conceito, de forma a determinar o montante ao final de um determinado período, quando a capitalização dos juros tende ao infinito.

O número *e* é a base dos logaritmos naturais e a sua relação $e^x = ln(x)$ é um dos conceitos mais importantes da matemática.

A falta de base com relação aos aspectos históricos e originários dos fundamentos da matemática financeira faz com que comumente os cálculos sejam efetuados mecanicamente através do uso de fórmulas, em que não compreendemos como foram determinadas nem o porquê de suas variáveis. Entendendo a relação exponencial com a matemática financeira, podemos começar a perceber e a compreender o real significado e aplicação de cada variável de suas fórmulas básicas e por que a evolução dos juros ao longo do tempo é uma função exponencial.

- Recebido em: 06/07/2006
- Aprovado em: 23/04/2007

Referências

BAUER, Udibert Reinold. **Matemática financeira fundamental**. São Paulo: Atlas, 2003.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 1995.

GITMAN, Lawrence J. **Princípios de administração financeira**. 10.ed. São Paulo: Pearson, 2005.

HOFFMANN, Laurence; BRADLEY, Gerald L. **Cálculo**. 7.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

NAPIER, John. **Mirifi logarithmorum canonis descriptio.** 2.ed. 1618. Disponível em: <http://www.prandiano.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2007.

PADOVEZE, Clóvis Luís. **Introdução à administração de empresas**. São Paulo: Thomson, 2005.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. **A construção do cálculo**. São José dos Campos: CTA, 1987.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. **Arqueologia matemática**. São Paulo: Prandiano, 1991.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. **Matemática**: ensino e aplicação. São Paulo: Prandiano, 2002.

ROBERT, Jozsef. **A origem do dinheiro**. São Paulo: Global, 1982.

SAMANEZ, Carlos Patrício. **Matemática financeira**. 3.ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall, 2002.

SANDRONI, Paulo. **Novíssimo dicionário de economia**. São Paulo: Best Seller, 2001.